MA1 - Domácí úkol 2 (lineární algebra). Jméno:

1. Buďte dány vektory $\vec{u}=(3,\ 2,\ 2)$, $\vec{v}=(2,\ 1,\ -1)$. Spočítejte $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$.

2 . a) Jsou dány vektory $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\in R^4$:

$\vec{u}_1=(1,\ -1,\ 2,\ 3)$, $\vec{u}_2=(0,\ 2,\ 1,\ 0)$, $\vec{u}_3=(0,\ 0,\ -1,\ 1)$.

Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.

b) Existuje reálné číslo a , pro které jsou vektory $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4\in R^4$ lineárně závislé, je-li :

$\vec{u}_1=\left(0,\ 0,\ -1,\ a^2\right)$, $\vec{u}_2=(1,\ 2a,\ -a,\ 1)$, $\vec{u}_3=(0,\ 0,\ 0,\ 3)$, $\vec{u}_4=\left(0,\ 2,\ a^3,\ 1\right)$?

3. Užitím Gaussovy eliminační metody najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
2x-\ y+\ z+\ v&=-3\\
x+\ y+3z-\ v&=\ 0\\
-x+2y-\ z+\ v&=\ 6\\
x+\ y+2z-3v&=-2
\end{aligned},$$

nebo ukažte, že soustava řešení nemá.

4. a) Určete hodnost matice $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&4&-2&3\\2&1&-1&2\\-1&1&0&1\end{pmatrix}$.

b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*)\quad \begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&4&-2&3\\2&1&-1&2\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad ?$$

c) Soustavu $(*)$ vyřešte .

5. Je dána matice $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\2&3&1&-1&2\\0&1&3&-1&0\end{pmatrix}$.

Najděte všechny vektory $v\in R^5$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A .

6. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

---

7. Jsou dány matice $M = \begin{pmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Vypočítejte $\det M$, $\det N$, $\det(M \cdot N)$ a ukažte si, že platí $\det M \cdot \det N = \det(M \cdot N)$.

---

8. Je dána matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Ukažte, že k matici B existuje matice inverzní a určete ji (Gauss-Jordanovou metodou i užitím determinantů). Ověřte správnost výpočtu matice B^{-1}.

b) Užitím B^{-1} řešte rovnici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

---

9. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji.
b) Užitím inverzní matice řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

---

10. Pomocí determinantu najděte rovnici roviny, ve které leží body $A[1,-1,2]$, $B[2,1,0]$ $C[-1,1,1]$.